EXERCICE N°1 : 25' 5 points

Soit l'ensemble $S = \{ M(x,y,z) \in \xi / x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0 \}$.

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x - 2y + 2z + 2 = 0$.

a) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle $\mathscr{C}$.

b) Déterminer les coordonnés du centre A et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.

3) Soit M(a,b,-1) un point de la sphère S avec a et b deux réels et le plan Q dont une équation cartésienne est : $(a - 1)x + (b + 2)y + z - a + 2b + 3 = 0$.

a) Montrer que M appartiennent au plan Q.

b) Montrer que S et Q sont tangents en M.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

L'espace est rapporté à un repère ON direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les plans : P : $x + y + 1 = 0$, Q : $2x - y - z - 1 = 0$ et le point A(2,1,-2).

1) a) Montrer que P et Q sont sécantes suivant une droite D.

b) Donner une représentation paramétrique de D.

2) a) Donner une équation cartésienne du plan R passant par A et perpendiculaire à D.

b) Calculer d(A,D) la distance de A à D.

3) Soit $S_m : x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y + 4z + 4 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m.

b) Déterminer suivant les valeurs de m les positions relatives de S_m et P.

4) a) Pour m = -1, déterminer l'intersection de S_{-1} et Q.

b) Déterminer les plans parallèles à Q et sécants à S_{-1} suivant des cercles de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE N°3 : 30' 5 points

L'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(0,0,3), B(1,-1,0) et le plan P : $x + y - z = 0$.

1) Soit Q le plan passant par A et B et perpendiculaire à P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : $2x - y + z - 3 = 0$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite $D = P \cap Q$.

2) Soit $S_m = \{M(x,y,z) \in \xi / x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 3m = 0\}$ où m est un paramètre réel.

a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature et les éléments caractéristiques de S_m.

b) Montrer que le plan P coupe $S_{3/2}$ en un cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera.

3) Soit le point M(2,1,cos t) avec $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, on note $d = d(M, D)$.

a) Montrer que $d^2 = \frac{1}{2}\cos^2 t - 2\cos t + 3$.

b) Déterminer la nature de t pour laquelle d est minimale.

c) Montrer que D est une tangente à $\mathscr{C}$.